

# KUPC2017-F 575

---

Writer: basemusi

# 問題概要

2以上7以下の整数からなる項数 $N$ の数列 $x$ がある

$x$ から五七五列である部分列をできるだけ多く取り除きたい

$x$ から取り除ける五七五列の最大個数を求めよ

# 五七五列の定義

長さ  $n$  の数列  $s$  について、次の条件を満たす空でない数列  $a, b, c$  が存在するとき、数列  $s$  は五七五列である

- $a, b, c$  を連結した数列は  $(1, 2, \dots, n)$  の順列である
- $\min_i(a_i) < \min_i(b_i) < \min_i(c_i)$
- $\sum s_{a_i} = 5$
- $\sum s_{b_i} = 7$
- $\sum s_{c_i} = 5$

五七五列の例

2 3 5 4 3

# 五七五列の例

2 3 5 4 3

$a = (1, 5)$  左の五

$b = (2, 4)$  中の七

$c = (3)$  右の五

## 入出力例

5 6 2 3 5 5 5 7 5 3

# 入出力例

5 6 2 3 5 5 5 7 5 3

a = (1) 左の五

b = (3, 5) 中の七

c = (6) 右の五

# 入出力例

5 6 2 3 5 5 5 7 5 3

a = (7) 左の五

b = (8) 中の七

c = (9) 右の五

この例では解は2



# 方針

1. 解で二分探索
2. a(左の五),c(右の五)の取り方を列挙
3. 列挙した五の取り方ごとに、b(中の七)を最善につくる

# 解法

この問題では直接解を求めることが難しい

そのため適当な解を仮定し、その解の個数の五七五列が与えられた数列から取り出せるかを調べるプログラムを書く

それを利用して実際の解を二分探索で求める

# 左の五(a),右の五(c)について

和が五になる数列は(5),(2,3),(3,2)だけ

直感的には、

左の五のインデックスaは小さい方がよい

右の五のインデックスcは大きい方がよい

上記に注意して左の五と右の五を取り出す

(簡単な証明は後述)

# 五の取り出し方の簡単な証明

与えられる数列 $x$ に5,7しか含まれないときを考える

5 5 5 5 7 5 7 5 7 5 7

この場合、**左の五**は左から貪欲に、**右の五**は右から貪欲に取りだせばよいことは少し考えると分かる

五を取り出したら、それぞれの七について、直近の左右の五とペアにして五七五列として取り出すと最大数の五七五列が得られる

# 五の取り出し方の簡単な証明

与えられる数列 $x$ に5,7しか含まれないときを考える

5 5 5 5 7 5 7 5 7 5 7

この場合、**左の五**は左から貪欲に、**右の五**は右から貪欲に取りだせばよいことは簡単に分かる

五を取り出したら、それぞれの七について、直近の左右の五とペアにして五七五列として取り出すと最大数の五七五列が得られる

# 五の取り出し方の簡単な証明

与えられる数列 $x$ に5,7しか含まれないときを考える

5 5 5 5 7 5 7 5 7 5 7

この場合、**左の五**は左から貪欲に、**右の五**は右から貪欲に取りだせばよいことは簡単に分かる

五を取り出したら、それぞれの七について、直近の左右の五とペアにして五七五列として取り出すと最大数の五七五列が得られる

# 五の取り出し方の簡単な証明

与えられる数列 $x$ に5,7しか含まれないときを考える

5 5 5 5 7 5 7 5 7 5 7

この場合、**左の五**は左から貪欲に、**右の五**は右から貪欲に取りだせばよいことは簡単に分かる

五を取り出したら、それぞれの七について、直近の左右の五とペアにして五七五列として取り出すと最大数の五七五列が得られる

# 五の取り出し方の簡単な証明

与えられる数列xに5,7以外の数も含まれる場合  
数列から和が5,7の部分列の取り出し方を決めると

5 6 2 3 5 5 5 7 5 3

その解は下の5,7だけの数列から五七五列を取り出すときと等しい

5    7        5 5 7 5



# 五の取り出し方の簡単な証明

これらのことを踏まえると右の五より右に左の五があるケースは考えなくてよいことが分かる

(任意の五七五列のあるa,cについてaの初項がcの初項より大きいケースは考えなくてよい)

5 7 5 7 5 3 2

上の例では5が5より右にあるが、その場合右の五と左の五を入れ替えた以下の例がそれ以上の五七五列を取り出せるので、上の例を考えなくてよい

5 7 5 7 5 3 2

# 五の取り出し方の簡単な証明

ここまでの証明から左右の五を取り出すと以下のようにになると仮定してよい

.. 5 .. 5 .. 5 .. 5 .. 5 .. 5 ..

小  $\longleftrightarrow$  大  $\longleftrightarrow$  小

七の位置と価値

このとき、中の七の価値が上のように位置によって変わる

左の五と右の五の丁度間では、どの左右の五のペアとも対にして五七五列ができる

中の七の位置が端に行けば行くほど、対にできる左右の五の数が減る

従って、右の五の位置が右にあるほど、左の五が左にあるほど、中の七をよりうまく作ることができる

# 右の五について

右の五として使う(5)を $p$ 個取り出すとき、数列の右の方から(5)を貪欲に取るのが最善

3個とる場合

... 5 2 5 3 5 4 5 5

# 右の五について

右の五として使う(2,3)または(3,2)をp個取り出すとき、  
数列の右の方からp個貪欲に取るのが最善

2個とる場合

... 5 2 5 3 2 4 2 3 4



... 5 2 5 5 4 5 4

# 左の五について

左の五として使う(5)をp個取り出すとき、数列の左の方から(5)をp個貪欲に取るのが最善

3個とる場合

5 2 5 7 5 3 5 4 5 5

# 左の五について

左の五として使う(2,3)をp個取り出すとき、数列の左の方から(2)をp個貪欲に取り、今後の処理で3をp個使用しないで残すのが最善

2個とる場合

2 3 6 2 7 3 5 3 4 5 5 ...



5 3 6 5 7 3 5 3 4 5 5 ...

ただし、数列に3を二つ残すように今後操作する

# 左の五について

左の五として使う(3,2)をp個取り出すとき、数列の左の方から(3)をp個貪欲に取り、今後の処理で2をp個使用しないで残すのが最善

2個とる場合

3 3 6 3 7 2 5 2 4 2 5 ...



5 3 6 5 7 2 5 2 4 2 5 ...

ただし、数列に2を二つ残すように今後操作する

# 左右の五

解を二分探索して、与えられた数列から $p$ 個の五七五列を取り出そうとするとき

左の五として $(5)$ を $q$ 個、 $(2, 3)$  or  $(3, 2)$ を $r$ 個

右の五として $(5)$ を $s$ 個、 $(2, 3)$ を $t$ 個、 $(3, 2)$ を $u$ 個

を $q, r, s, t, u$ を全パターン変えて、最善の左右の五をつくる

こうしてつくった左右の五に対して、最善に中の七( $b$ )をつくる



# 中の七(b)の作り方

和が七となる組は(7), (5, 2), (4, 3), (2, 2, 3)の4種類

これらの七を用いて左右の五と組み合わせて五七五列をつくる

まず(7)について処理し、その次に(5, 2)、最後に(4, 3), (2, 2, 3)をまとめて処理する

ただし、左の五のために使う2,3が余っている間だけ(5, 2), (4, 3), (2, 2, 3)の処理を行う

# 中の七(7)の作り方

与えられる数列xに5,7しか含まれないときと同様に、それぞれの7について、一番近い左の五と右の五を組み合わせる五七五列とするのが最善

このように五七五列をつくっても後の操作で不利になることはない  
(ある7を用いる場合このような消し方が最善。ある7を用いずにある個数の五七五列がつかれるとき、7を用いてもその個数の五七五列がつかれる。)

5 5 7 5 5 5 7 5 7 5 7

# 中の七(2, 2, 3)について

(2, 2, 3)を(2, 3)と(2)に分けて考えたとき、そのうちの(2, 3)で作られる5は左の五と右の五の間にしかないと考えてよい

5 .. 2 5 2 3 5 .. 5

5 .. 5 2 5 3 2 .. 5



5 .. 2 5 2 3 5 .. 5

5 .. 5 2 5 3 2 .. 5

(2, 2, 3)のうち(2, 3)が左右の五より端にある場合は上のように左右の五を組み替えた例で対処ができる

また、このことから(2, 2, 3)は左の五より左に行かないと仮定してよい

# 中の七(5, 2)の作り方

5と最も右にある2を対にして7として五七五列をつくるのが最善

左右の五の作り方から、未使用の5は必ず左の五と右の五の間にある。  
また前述のように、(2, 2, 3)を(2, 3)と(2)に分けて考えたとき、そのうちの(2, 3)で作られる5もまた、左の五と右の五の間にしかないと考えてよい

また、残っている2は(5)or(2, 3)と組み合わせて使う以外の用途がないので、最も価値の高い位置に中の七をつくりつつ、その中で価値の低い2を用いる  
上述の方法で(5, 2)をつくるのが最善である

5 2 5 5 5 2 5 5 5 5 2

# 中の七(5, 2)の作り方

5と最も右にある2を対にして7として五七五列をつくるのが最善

左右の五の作り方から、未使用の5は必ず左の五と右の五の間にある。

また前述のように、(2, 2, 3)を(2, 3)と(2)に分けて考えたとき、そのうちの(2, 3)で作られる5もまた、左の五と右の五の間にしかないと考えてよい

また、残っている2は(5)or(2, 3)と組み合わせて使う以外の用途がないので、最も価値の高い位置に中の七をつくりつつ、その中で価値の低い2を用いる  
上述の方法で(5, 2)をつくるのが最善である

5 2 5 5 5 2 5 5 5 5 5 2

# 中の七(5, 2)の作り方

5と最も右にある2を対にして7として五七五列をつくるのが最善

左右の五の作り方から、未使用の5は必ず左の五と右の五の間にある。

また前述のように、(2, 2, 3)を(2, 3)と(2)に分けて考えたとき、そのうちの(2, 3)で作られる5もまた、左の五と右の五の間にしかないと考えてよい

また、残っている2は(5)or(2, 3)と組み合わせて使う以外の用途がないので、最も価値の高い位置に中の七をつくりつつ、その中で価値の低い2を用いる  
上述の方法で(5, 2)をつくるのが最善である

5 2 5 5 7 2 5 5 5 5 5 2

# 中の七(5, 2)の作り方

5と最も右にある2を対にして7として五七五列をつくるのが最善

左右の五の作り方から、未使用の5は必ず左の五と右の五の間にある。

また前述のように、(2, 2, 3)を(2, 3)と(2)に分けて考えたとき、そのうちの(2, 3)で作られる5もまた、左の五と右の五の間にしかないと考えてよい

また、残っている2は(5)or(2, 3)と組み合わせて使う以外の用途がないので、最も価値の高い位置に中の七をつくりつつ、その中で価値の低い2を用いる  
上述の方法で(5, 2)をつくるのが最善である

5 2 5 5 7 2 5 5 5 5 5 2

# 中の七(5, 2)の作り方

5と最も右にある2を対にして7として五七五列をつくるのが最善

左右の五の作り方から、未使用の5は必ず左の五と右の五の間にある。

また前述のように、(2, 2, 3)を(2, 3)と(2)に分けて考えたとき、そのうちの(2, 3)で作られる5もまた、左の五と右の五の間にしかないと考えてよい

また、残っている2は(5)or(2, 3)と組み合わせて使う以外の用途がないので、最も価値の高い位置に中の七をつくりつつ、その中で価値の低い2を用いる  
上述の方法で(5, 2)をつくるのが最善である

5 2 5 5 7 7 5 5 5 5 2



# 中の七(5, 2)の作り方

5と最も右にある2を対にして7として五七五列をつくるのが最善

左右の五の作り方から、未使用の5は必ず左の五と右の五の間にある。  
また前述のように、(2, 2, 3)を(2, 3)と(2)に分けて考えたとき、そのうちの(2, 3)で作られる5もまた、左の五と右の五の間にしかないと考えてよい

また、残っている2は(5)or(2, 3)と組み合わせて使う以外の用途がないので、最も価値の高い位置に中の七をつくりつつ、その中で価値の低い2を用いる  
上述の方法で(5, 2)をつくるのが最善である

5 2 5 5 7 7 5 5 5 5 2

# 中の七(4, 3), (2, 2, 3)の作り方

(4, 3)と(2, 2, 3)は(3)と(2, 2)or(4)を組み合わせてできる

(2, 2)を(4)に先に変換すると実装が楽

前述のように(2, 2, 3)は左の五より左で作ることを考えなくてよいので、(2, 2)を下のように左の五から右にある2の中で両端から組にしていくのが最善

5 5 .. 5 2 3 2 5 2 3 2 5 2.. 5

# 中の七(4, 3), (2, 2, 3)の作り方

(4, 3)と(2, 2, 3)は(3)と(2, 2)or(4)を組み合わせてできる

(2, 2)を(4)に先に変換すると実装が楽

前述のように(2, 2, 3)は左の五より左で作ることを考えなくてよいので、(2, 2)を下のように左の五から右にある2の中で両端から組にしていくのが最善

5 5 .. 5 2 3 2 5 2 3 2 5 2.. 5

# 中の七(4, 3), (2, 2, 3)の作り方

(4, 3)と(2, 2, 3)は(3)と(2, 2)or(4)を組み合わせてできる

(2, 2)を(4)に先に変換すると実装が楽

前述のように(2, 2, 3)は左の五より左で作ることを考えなくてよいので、(2, 2)を下のように左の五から右にある2の中で両端から組にしていくのが最善

5 5 .. 5 4 3 2 5 2 3 2 5 2.. 5

# 中の七(4, 3), (2, 2, 3)の作り方

(4, 3)と(2, 2, 3)は(3)と(2, 2)or(4)を組み合わせてできる

(2, 2)を(4)に先に変換すると実装が楽

前述のように(2, 2, 3)は左の五より左で作ることを考えなくてよいので、(2, 2)を下のように左の五から右にある2の中で両端から組にしていくのが最善

5 5 .. 5 4 3 2 5 2 3 2 5 2.. 5

# 中の七(4, 3), (2, 2, 3)の作り方

(4, 3)と(2, 2, 3)は(3)と(2, 2)or(4)を組み合わせてできる

(2, 2)を(4)に先に変換すると実装が楽

前述のように(2, 2, 3)は左の五より左で作ることを考えなくてよいので、(2, 2)を下のように左の五から右にある2の中で両端から組にしていくのが最善

5 5 .. 5 4 3 4 5 2 3 2 5 2.. 5

# 中の七(4, 3)の作り方

残りは左右の五と(4, 3)を組み合わせればよい

左の五より右にある一番近い3or4と最も右にある3or4を順に組み合わせるのが最善

5 3 4 5 3 5 5 3 5 4 5 4

# 中の七(4, 3)の作り方

残りは左右の五と(4, 3)を組み合わせればよい

左の五より右にある一番近い3or4と最も右にある3or4を順に組み合わせるのが最善

5 3 4 5 3 5 5 3 5 4 5 4



# 中の七(4, 3)の作り方

残りは左右の五と(4, 3)を組み合わせればよい

左の五より右にある一番近い3or4と最も右にある3or4を順に組み合わせるのが最善

5 3 4 5 3 5 5 7 5 4 5 4

# 中の七(4, 3)の作り方

残りは左右の五と(4, 3)を組み合わせればよい

左の五より右にある一番近い3or4と最も右にある3or4を順に組み合わせるのが最善

5 3 4 5 3 5 5 7 5 4 5 4

# 中の七(4, 3)の作り方

残りは左右の五と(4, 3)を組み合わせればよい

左の五より右にある一番近い3or4と最も右にある3or4を順に組み合わせるのが最善

5 3 4 5 7 5 5 7 5 4 5 4

# 中の七(4, 3)の作り方

残りは左右の五と(4, 3)を組み合わせればよい

左の五より右にある一番近い3or4と最も右にある3or4を順に組み合わせるのが最善

5 3 4 5 7 5 5 7 5 4 5 4

# 計算量

簡単に見積もると、

解の二分探索に $O(\log(N/3))$

左の五の探索に $O(N/3)$

右の五の探索に $O((N/3)^2)$

七の作り方に  $O(N\log N)$ 程度

全体で $O(N^4\log^2(N)) \doteq 10^8$ となるが、左右の五を作る計算量を重くする(2, 3)が多く入力に与えられると、全体の解が小さくなることや、 $O(N\log N)$ かけて調べなくても中の七が作れない場合を枝刈りできることを考慮すると間に合う