

KUPC2017 – J

Paint Red and Make Graph

asi1024

問題概要

- $H \times W$ の盤面の各マスは白か黒である
- 白マスのうち一部を赤く塗り, 全ての列と行に1つ以上赤マスがあるようにする
- 以下のようなグラフを作る
 - 赤マスに対して対応する頂点を作る
 - 同じ行, 同じ列にある頂点同士を辺で結ぶ
- 赤く塗るマスの数を最小化したい
- そのときの塗り方の個数を求めよ

解法

- 行と列 \rightarrow 頂点, マス \rightarrow 辺 とみなしたとき, 以下のように問題を置き換えられる
 - $H + W$ 頂点の二部グラフが与えられる
 - 全域木は何通り作れるか
- 行列木定理で解ける
- 行列式を求めると $O((H + W)^3)$ になりそう？

解法

- 実はこんな感じの疎行列の行列式になる
 - もうほとんど上三角化されている

$$\left(\begin{array}{ccc|c} d_1 & & & \\ & \ddots & & A^\top \\ & & d_H & \\ \hline & & & B \\ A & & & \end{array} \right)$$

- 掃き出し法で $O(HW^2+W^3)$ で解ける