K: Xor Array Pattern
解説

原案:SuginaMiku

Kyoto Univ

2017/10/01

問題概要

問題

- n,m,k が与えられる
- 長さ n で $0 \leq s_i \leq m$ $(1 \leq i \leq n)$ であり、かつ 0 xor s_1 xor s_2 $xor ... s_n = k$ であるような数列 $\{s_i\}$ の数を $10^9 + 7$ で割った数を求める
- $0 \leq n, m, k \leq 10^{18}$

問題概要

例 (sample3)

(n,m,k)=(3,2,3) のとき、数列は

- 0, 1, 2
- 0, 2, 1
- 1, 0, 2
- 1, 2, 0
- 2, 0, 1
- 2, 1, 0

の 6 通りである

考察

- $m = 4$ のときを考える
- $0\ xor\ s_1\ xor\ s_2\ xor ... s_n$ は $0 \sim 7$ までの値をとる
  - $n = 0$ のとき、$k = 0 \sim 7$ の数列の数はそれぞれ
    $1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0$
  - $n = 1$ のとき、
    $1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0$
  - $n = 2$ のとき、
    $5, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2$
  - $n = 3$ のとき、
    $19, 19, 19, 19, 13, 12, 12, 12$
  - $n = 4$ のとき、
    $89, 88, 88, 88, 68, 68, 68, 68$

考察

- 同じような数があちらこちらにみえる
- n が偶数のときは後ろ半分が同じ数になりそう
- n が奇数のときは前半分が同じ数になりそう

解法の考察

- 次のような行列 A を考えてみる

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A の i 行 j 列目が表しているのは、$j\ xor\ p = i$ となる
p $(0 \leq p \leq m)$ が存在するかどうか
(xor の合計の j から i への遷移が存在するか) である

解法の考察

- $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = y$ とすると、y_k が答えになる
- これを愚直に計算しようとすると $O(nm^3)$、行列累乗をバイナリ法で高速化しても $O(m^3 \log n)$

解法の考察

- もう少し行列を観察する

$$
A^1 = \left(\begin{array}{c|c}
1 & \begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \end{array} \\ \hline
\begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \end{array} & 1
\end{array}\right)
$$

$$
A^2 = \left(\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} 5 & 4 \\ \hline 4 & 5 \end{array} & 4 \\ \hline 4 & \begin{array}{c|c} 5 & 4 \\ \hline 4 & 5 \end{array} \end{array} & 2 \\ \hline
2 & \begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} 5 & 4 \\ \hline 4 & 5 \end{array} & 4 \\ \hline 4 & \begin{array}{c|c} 5 & 4 \\ \hline 4 & 5 \end{array} \end{array}
\end{array}\right)
$$

解法の考察

$$
A^3 = \left(\begin{array}{c|c}
19 & \begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} 13 & 12 \\ \hline 12 & 13 \end{array} & 12 \\ \hline 12 & \begin{array}{c|c} 13 & 12 \\ \hline 12 & 13 \end{array} \end{array} \\ \hline
\begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} 13 & 12 \\ \hline 12 & 13 \end{array} & 12 \\ \hline 12 & \begin{array}{c|c} 13 & 12 \\ \hline 12 & 13 \end{array} \end{array} & 19
\end{array}\right)
$$

$$
A^4 = \left(\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} 89 & 88 \\ \hline 88 & 89 \end{array} & 88 \\ \hline 88 & \begin{array}{c|c} 89 & 88 \\ \hline 88 & 89 \end{array} \end{array} & 68 \\ \hline
68 & \begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} 89 & 88 \\ \hline 88 & 89 \end{array} & 88 \\ \hline 88 & \begin{array}{c|c} 89 & 88 \\ \hline 88 & 89 \end{array} \end{array}
\end{array}\right)
$$

解法の考察

- A を偶数乗したとき、奇数乗したときで行列は 2 種類の形状をとる
- いずれの場合も出てくる数字は高々 $floor(\log_2 m) + 2$ 個
- 出てくる数字だけを上手いこと扱って計算する方法を考える

解法 1

- 累乗して偶奇で行列の形が変動すると扱いづらいので、偶数のときの形に変形して統一する

$$
\left(\begin{array}{c|c}
1 & \begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \end{array} \\ \hline
\begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \end{array} & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\rightarrow \left(\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \end{array} & 1 \\ \hline
1 & \begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \end{array}
\end{array}\right)
$$

解法 1

- 変形した行列を、例えば次のように圧縮した行列 B を考える

$$
\left(\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} & 0 \\ \hline
0 & \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}
\end{array} & 1 \\ \hline
1 & \begin{array}{c|c}
\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} & 0 \\ \hline
0 & \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}
\end{array}
\end{array}\right)
$$

$$
\to B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

解法 1

$$B^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \times 2^0 & 0 \times 2^1 & 1 \times 2^2 \\ 1 & 0 & 0 \times 2^1 & 1 \times 2^2 \\ 0 & 0 \times 2^0 & 0 + 1 & 1 \times 2^2 \\ 1 & 1 \times 2^0 & 1 \times 2^1 & 0 + 1 + 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \times 2^0 & 4 \times 2^1 & 2 \times 2^2 \\ 4 & 5 & 4 \times 2^1 & 2 \times 2^2 \\ 4 & 4 \times 2^0 & 5 + 4 \times 2^0 & 2 \times 2^2 \\ 2 & 2 \times 2^0 & 2 \times 2^1 & 5 + 4 \times 2^0 + 4 \times 2^1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 13 & 12 \times 2^0 & 12 \times 2^1 & 19 \times 2^2 \\ 12 & 13 & 12 \times 2^1 & 19 \times 2^2 \\ 12 & 12 \times 2^0 & 13 + 12 \times 2^0 & 19 \times 2^2 \\ 19 & 19 \times 2^0 & 19 \times 2^1 & 13 + 12 \times 2^0 + 12 \times 2^1 \end{pmatrix}$$

解法 1

$$A^2 = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
5 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
4 & 5 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
4 & 4 & 5 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
4 & 4 & 4 & 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 4 & 4 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 5 & 4 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & \multicolumn{2}{c}{4} & 5 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & \multicolumn{2}{c}{} & 4 & 5
\end{array}\right)$$

$$B^2 = \begin{pmatrix}
5 & 4 \times 2^0 & 4 \times 2^1 & 2 \times 2^2 \\
4 & 5 & 4 \times 2^1 & 2 \times 2^2 \\
4 & 4 \times 2^0 & 5 + 4 \times 2^0 & 2 \times 2^2 \\
2 & 2 \times 2^0 & 2 \times 2^1 & 5 + 4 \times 2^0 + 4 \times 2^1
\end{pmatrix}$$

解法 1

$$A^2 = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
5 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
4 & 5 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
4 & 4 & 5 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
4 & 4 & 4 & 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 4 & 4 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 5 & 4 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{4}} & 5 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & & & 4 & 5
\end{array}\right)$$

$$B^2 = \begin{pmatrix}
5 & 4 \times 2^0 & 4 \times 2^1 & 2 \times 2^2 \\
4 & 5 & 4 \times 2^1 & 2 \times 2^2 \\
4 & 4 \times 2^0 & 5 + 4 \times 2^0 & 2 \times 2^2 \\
2 & 2 \times 2^0 & 2 \times 2^1 & 5 + 4 \times 2^0 + 4 \times 2^1
\end{pmatrix}$$

解法 1

$$A^2 = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
5 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
4 & 5 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
4 & 4 & 5 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
4 & 4 & 4 & 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 4 & 4 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 5 & 4 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & \multicolumn{2}{c|}{4} & 5 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & & & 4 & 5
\end{array}\right)$$

$$B^2 = \begin{pmatrix}
5 & 4 \times 2^0 & 4 \times 2^1 & 2 \times 2^2 \\
4 & 5 & 4 \times 2^1 & 2 \times 2^2 \\
4 & 4 \times 2^0 & 5 + 4 \times 2^0 & 2 \times 2^2 \\
2 & 2 \times 2^0 & 2 \times 2^1 & 5 + 4 \times 2^0 + 4 \times 2^1
\end{pmatrix}$$

解法 1

$$
A^2 = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
5 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
4 & 5 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
4 & 4 & 5 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
4 & 4 & 4 & 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 4 & 4 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 5 & 4 & 4 \\
\hline
2 & 2 & 2 & 2 & 4 & & 5 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & & & 4 & 5
\end{array}\right)
$$

$$
B^2 = \begin{pmatrix}
5 & 4 \times 2^0 & 4 \times 2^1 & 2 \times 2^2 \\
4 & 5 & 4 \times 2^1 & 2 \times 2^2 \\
4 & 4 \times 2^0 & 5 + 4 \times 2^0 & 2 \times 2^2 \\
2 & 2 \times 2^0 & 2 \times 2^1 & 5 + 4 \times 2^0 + 4 \times 2^1
\end{pmatrix}
$$

解法 1

- B^n を求め、k に対応する要素を取り出せば答え
  - 偶奇で場合分けして頑張る
- B は $(floor(\log m) + 2)^2$ の行列なので、$O(\log n \times (\log m)^3)$
- これで AC 可能

解法 2

- B の 0 列目を計算するのに B 全体を持っておく必要はなく、B 全体も B の 0 列目から算出可能
- 長さ $(floor(\log m) + 2)^2$ の数列同士の掛け算になり、$O(\log n \times (\log m)^2)$ に計算量が落とせる
- さらに累積和で $O(\log n \times \log m)$ にできる