KUPC2019-H 123PUZZLE

YAMUNAKU

問題概要

- N 頂点 M 辺の有向単純グラフ
- 辺 i は頂点 u_i から v_i への辺で、ラベル $l_i \in \{0,1\}$ がついている
- 各頂点に数 $1, 2, 3$ のいずれかを書き込む
- 頂点 x に書かれた数を A_x として、$1 \leq i \leq M$ について
  – コスト $C_i := \max\{0,\ A_{u_i} - A_{v_i} + (1 - l_i)\}$
- C_i の総和の最小値を求めよ
- $2 \leq N \leq 5000, 1 \leq M \leq \min\{5000, N(N-1)\}$

問題概要

$l_i = 0$ のときの C_i

A_{u_i} \ A_{v_i}	1	2	3
1	1	0	0
2	2	1	0
3	3	2	1

$l_i = 1$ のときの C_i

A_{u_i} \ A_{v_i}	1	2	3
1	0	0	0
2	1	0	0
3	2	1	0

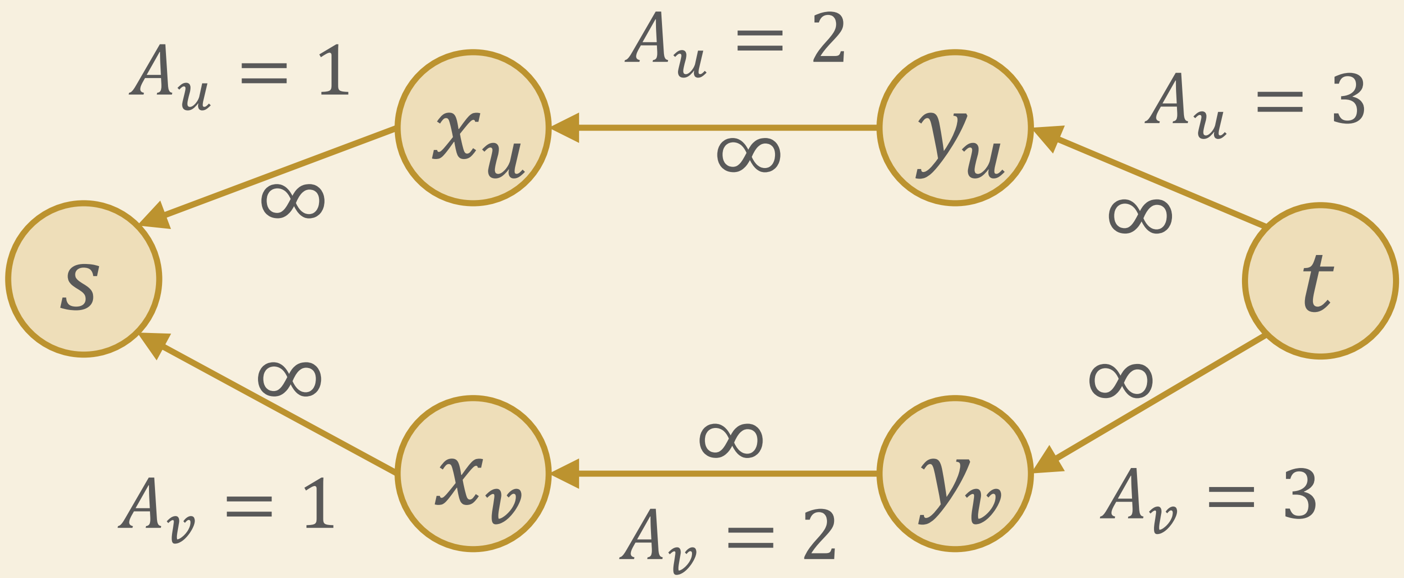
考察

- 辺 i で結ばれた 2 頂点に書く数を決めるとコスト C_i が決まる
- コストの総和を最小化したい
- 　→　最小カットで扱いやすそう

- C_i をカットのコストの形で表せれば、最小カットで解ける
- つまり、2 頂点に割り当てる数のペアとカットが対応し、カットの重みがコストと等しくなるようなグラフを作りたい

考察

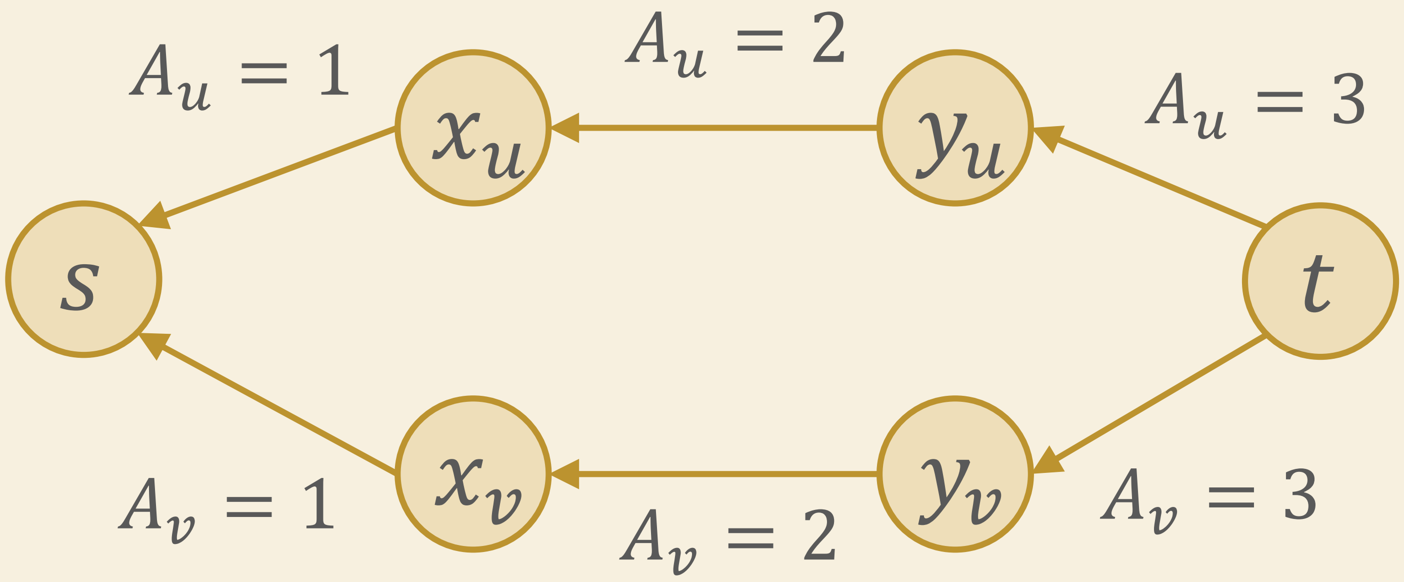
- 2 頂点に割り当てる数のペアとカットを対応させる



- 例えばカット $(\{s, x_u, y_u, x_v\}, \{y_v, t\})$ に対応するのは $(A_u, A_v) = (2, 3)$

考察

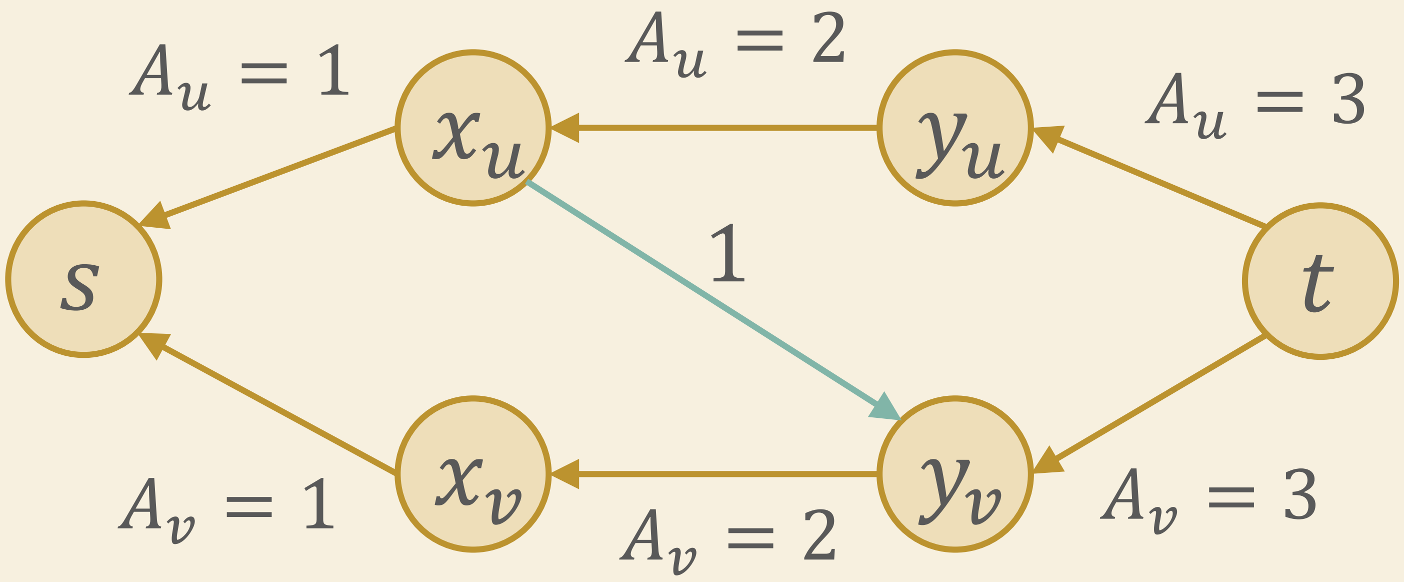
- カットの重みをコストと等しくする



u \ v	1	2	3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0

考察

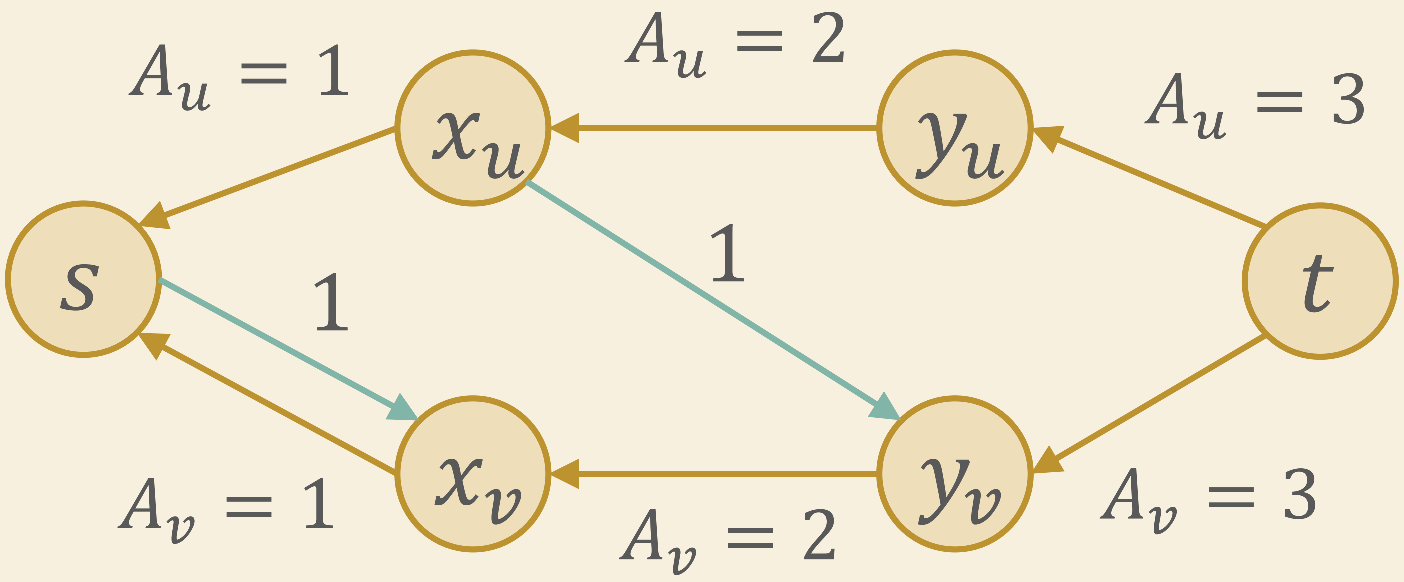
- カットの重みをコストと等しくする



u \ v	1	2	3
1	0	0	0
2	1	1	0
3	1	1	0

考察

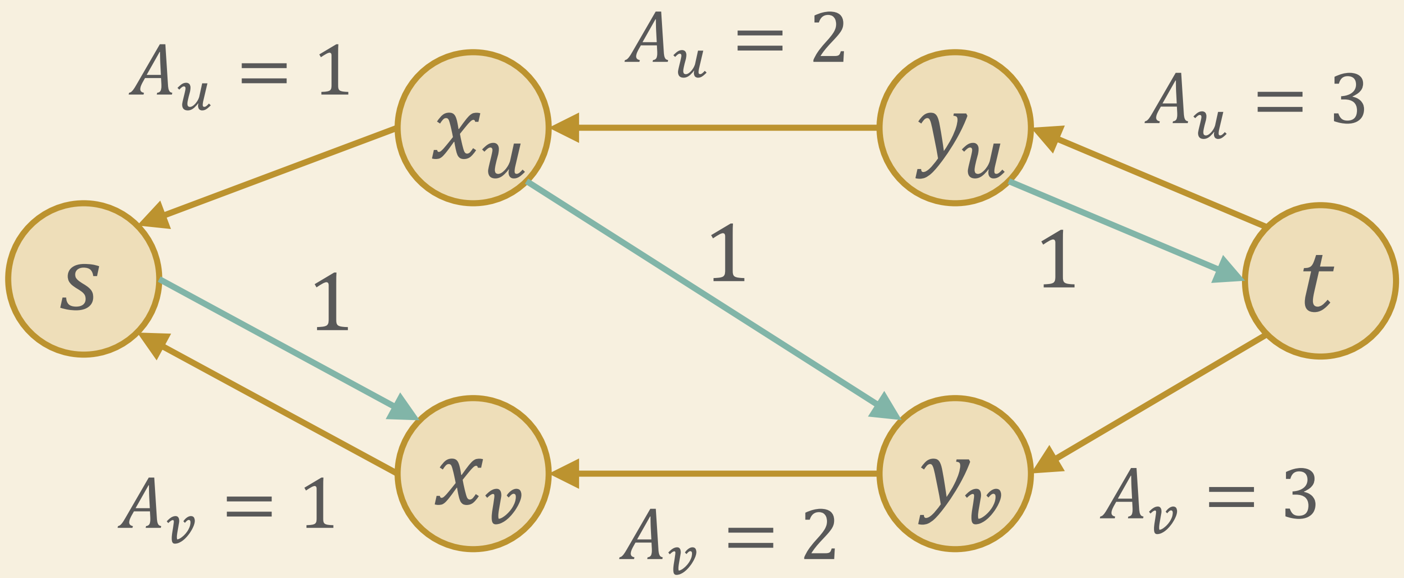
- カットの重みをコストと等しくする



$u \backslash v$	1	2	3
1	1	0	0
2	2	1	0
3	2	1	0

考察

- カットの重みをコストと等しくする

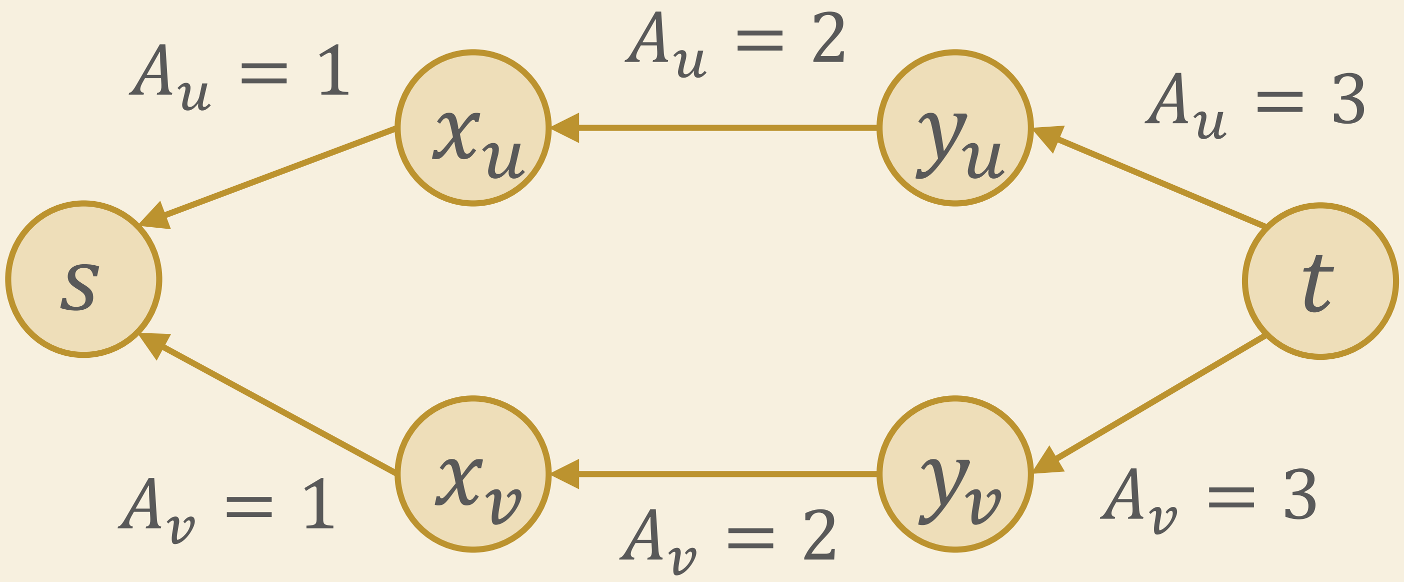


$u \backslash v$	1	2	3
1	1	0	0
2	2	1	0
3	3	2	1

- $l_i = 0$ のときの C_i を表せた

考察

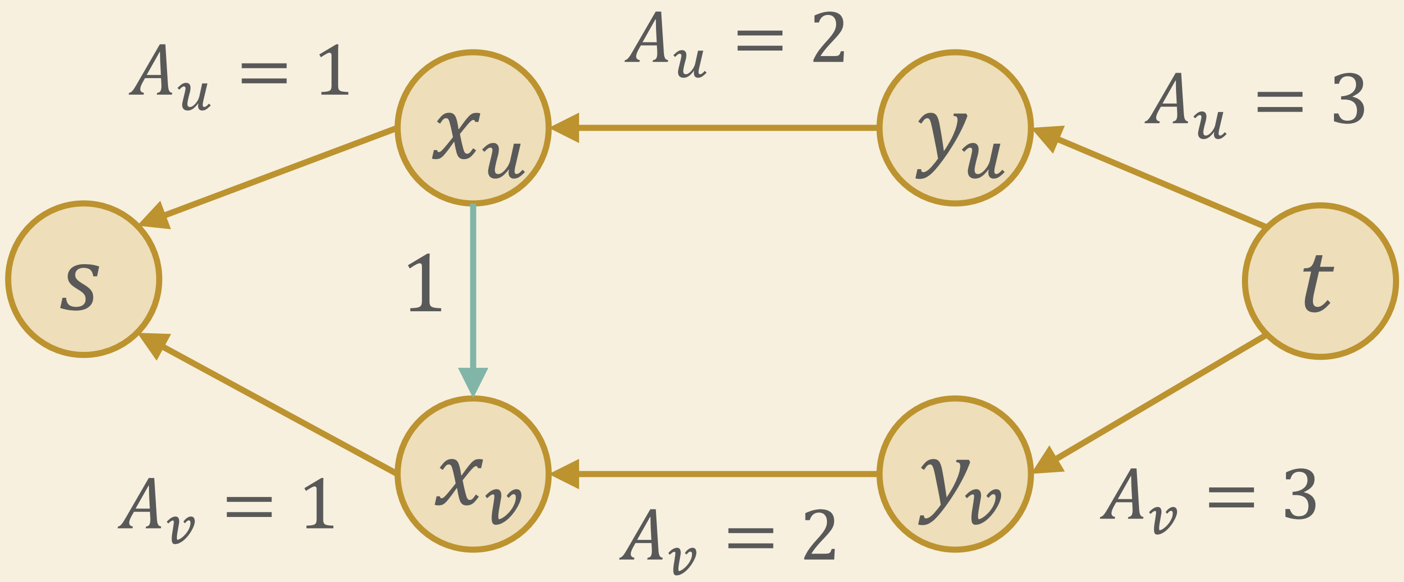
- カットの重みをコストと等しくする



$u \backslash v$	1	2	3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0

考察

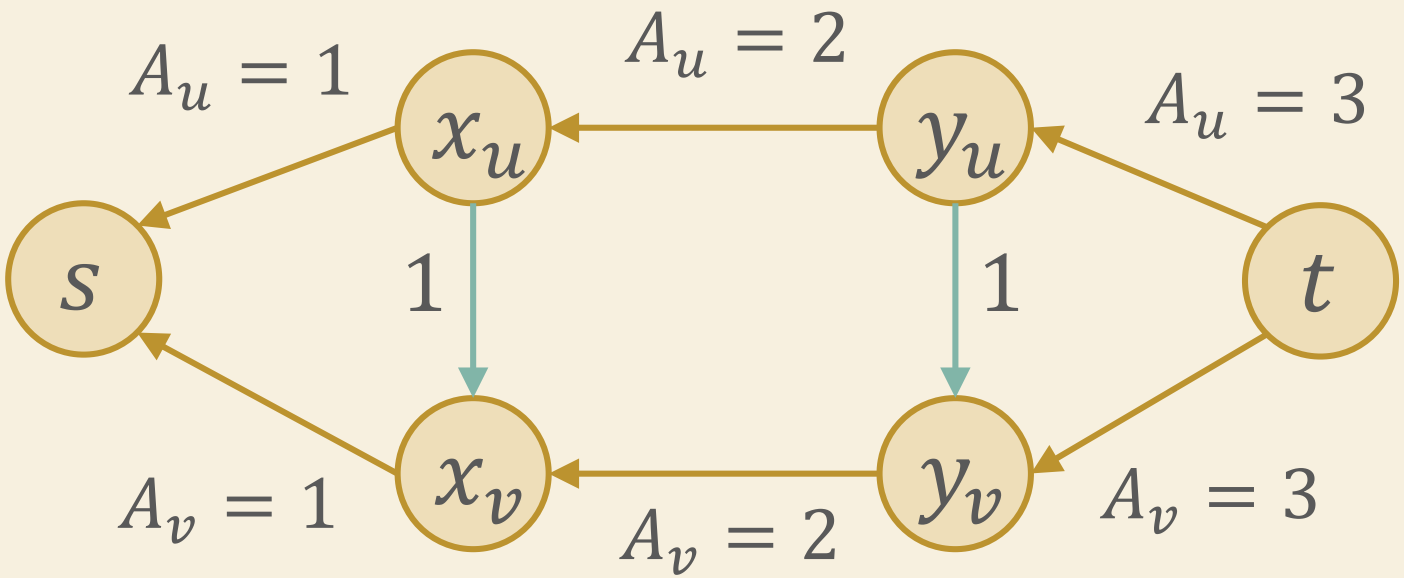
- カットの重みをコストと等しくする



u \ v	1	2	3
1	0	0	0
2	1	0	0
3	1	0	0

考察

- カットの重みをコストと等しくする

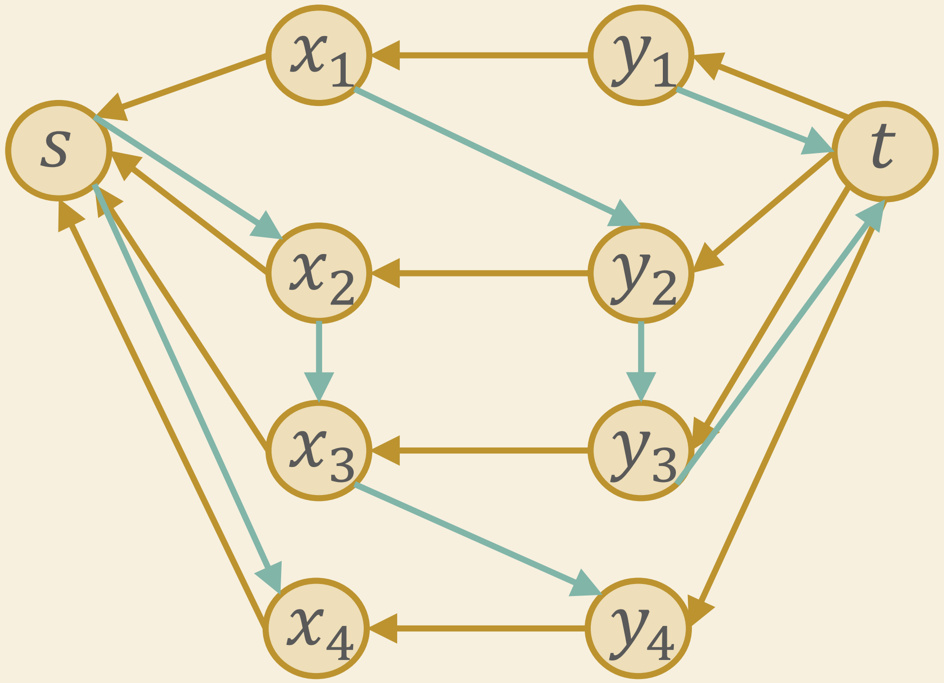


$u \backslash v$	1	2	3
1	0	0	0
2	1	0	0
3	2	1	0

- $l_i = 1$ のときの C_i を表せた

考察

- 頂点集合$\{s, t, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_N, y_N\}$のグラフに対して同じような辺を張り、最小カットを求めると、それが答えになる



考察

- 最小カットは最大フローに一致するから、最大フローを求めればよい

- 答えは M 以下である
  - すべての頂点に同じ数を書き込んだときを考えればよい
- 最大フローを求めたいグラフの辺数は $3N+3M$ 以下である
- Ford-Fulkerson法を用いれば、最大フローを $O(M(N+M))$ で求めることができる