KUPC 2019 - K / writer: gazelle

One or All

Outline

- 3 次元空間の原点に点 P がある。
- P を動かすことができる。方向は (+1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, +1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, +1), (0, 0, -1), (+1, +1, +1), (-1, -1, -1) の 8 種類。
- n 回動かして、P の座標を (p, q, r) mod m にするような動かし方はいくつあるか？

Observation

- 以下の行列 A による座標変換を考える。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Observation

- 変換前の座標に対する先述の 8 種類の操作は、変換後の座標に対する (-1, -1, -1), (-1, -1, +1), (-1, +1, -1), (-1, +1, +1), (+1, -1, -1), (+1, -1, +1), (+1, +1, -1), (+1, +1, +1) の 8 種類の操作に対応している。
- これらの操作は各次元で独立である。つまり、ある次元での選択が他の次元の選択肢に影響を与えることはない。
- A による変換は全単射なので、変換後の座標で問題を考えればいい。

Observation

- 変換前の座標に対する条件を、変換後の座標に対する条件に移すことを考える。
- A の逆変換には 2 で割る操作が入る。m が奇数なら、(変換前の座標 mod m) と(変換後の座標 mod m) は一対一に対応する。m が偶数なら、(変換前の座標 mod m) と(変換後の座標 mod m) は二対一に対応する。
- 正確には、変換後の座標の m による商の偶奇で、逆像がどれになるかが決まる。

Observation

- 以上をまとめると、A による変換後の座標で、まず次元ごとに独立に操作を数え上げ、それらを (m が偶数なら、逆像を間違えないように商の偶奇で分類した上で) 掛け合わせれば答えが求まる。
- 全体の計算量は O(nlogn) 程度であり、十分高速に動作する。

Statistic

- ここに統計情報を書く。