M: Many Parentheses

$DP[i][j]$ を i 個の箱に (が合計 j 個あるような括弧列の詰め方の総数と定義します。$DP[i][j]$ を $O(1)$ で求めることができれば、条件の「長さが K と一致する括弧列をいれてはいけない」の部分は包除原理を用いて対処できます。

したがって、$DP[i][j]$ を $O(1)$ で求められるように考えます。

まず、 (が i 個ある括弧列の数を C_i とします。これはカタラン数と呼ばれており、 $C_i = \sum_{1\le j<i}(C_j * C_{i-j})$ を満たします。

i 個目の箱に何個 (が入っているかを考えると、次の式が成立します。

$$DP[i][j] = \sum_{0\le k\le j}(DP[i-1][j-k] * C_k) \tag{1}$$

これをさらに $DP[i-1][j-k]$ の方で展開すると、

$$\begin{aligned}
DP[i][j] &= \sum_{0\le k\le j}(DP[i-1][j-k] * C_k) \\
&= \sum_{0\le k\le j}\left(\sum_{0\le l\le j-k}(DP[i-2][j-k-l] * C_l * C_k)\right) \\
&= \sum_{0\le k+l\le j}(DP[i-2][j-(k+l)] * C_l * C_k) \\
&= \sum_{0\le x\le j}(DP[i-2][j-x] * C_{x+1})
\end{aligned}$$

となります。(最後の等式はカタラン数の漸化式から導かれます。) ところで (1) より

$$\begin{aligned}
DP[i-1][j+1] &= \sum_{0\le x\le j+1}(DP[i-2][j+1-x] * C_x) \\
&= DP[i-2][j+1] + \sum_{1\le x\le j+1}(DP[i-2][j+1-x] * C_x) \\
&= DP[i-2][j+1] + \sum_{0\le x\le j}(DP[i-2][j-x] * C_{x+1})
\end{aligned}$$

であるので、

$$DP[i-1][j+1] = DP[i-2][j+1] + DP[i][j]$$

が成立します。書き直すと、

$$DP[i][j] = DP[i-1][j] + DP[i+1][j-1] \tag{2}$$

が成立します。

この漸化式を用いれば、$O(N^2)$ で $DP[i][j]$ の値を前計算できます。この際、初期値として

$$DP[i][0] = 1 (0 \leq i)$$
$$DP[0][j] = 0 (0 < j)$$

を用いることになります。

さて、さらにここから考察を深めます。$i >= j$ について $DP2[i][j] := DP[i-j][j]$ と定義すると、(2) から

$$DP2[x][y] = DP2[x-1][y] + DP2[x][y-1] \tag{3}$$

が導けます。この遷移式を使う時、初期値は $x = y$ の部分と $y = 0$ の部分で与えられており、$x = y = 0$ のとき 1、$x = y$ かつ $y > 0$ のとき 0 、$y = 0$ のとき 1 となります。

これは「途中で合計が負にならないように $+1$ を $x-1$ 個、-1 を y 個並べる方法の数」と言い換えられるので、(カタラン数を求めるときに盤面を折り返すテクを使うのと同様の手法を用いることで)

$$DP2[x][y] = (x-1+y, y) - (x-1+y, y-1)$$

が導かれます。

結論として、

$$\begin{aligned}
&DP[i][j] = (i-1+j+j, j) - (i-1+j+j, j-1) \ (i > 0)\\
&DP[i][j] = 1 \ (i = j = 0)\\
&DP[i][j] = 0 \ (i = 0 \text{ かつ } j > 0)
\end{aligned}$$

という事実が導かれ、これは $O(1)$ で計算できます。

(追記) この問題は多項式について考えることで $O(MlogM)$ で解くことが可能です。私はこの解法に気付かず $N, M <= 10^6$ と設定し、本番では多くのチームにこの解法で通されてしまいました。今度からこういった問題では $N, M <= 10^7$ にすべきだと反省しました。